

Elfújta a szél – és vissza is fújja? Akár magasabb dimenzióban is?

Oláh Márk

matematikus, PhD hallgató, Debreceni Egyetem

A matematikában gyakran megesik, hogy egy adott problémára nehezen találjuk meg a választ; jobb esetben sikerül legalább megsejteni (bár akkor sem mindig azt kapjuk, amire számítottunk...), azonban a precíz bizonyításra így is sokszor évtizedeket kell várni. Ez történt a közelmúltban az ún. Seifert-sejtés esetében is.

Képzeljük el Földünket, mint egy (közelítőleges) gömb felszínét, melyen időben állandó erősségű szél fúj. Ez a szél meghatározott irányban és nagyságú erővel mozgatja a felszínen lévő porszemeket, és feltéve, hogy sosem szűnik meg, és sosem változik, ez a mozgatóhatás a porszemeket kényszerpályára állítja: az egész további sorsukat előre meghatározza, a porszem adott pillanatnyi helyzetének és a szélnek az ismeretében az általa leírt pálya egyértelműen kiszámítható (elméletben legalábbis).

Ha már a porszem a saját sorsát nem is irányíthatja, arra azért kíváncsi lehet, hogy milyen jövő áll előtte: vajon a szél a végtelenségig játszadozik vele és mindig újabb helyre fújja (egy nyílt pályát ír le), esetleg egy idő után visszatér oda, ahonnan elindult és minden kezdődik előlről (egy zárt pályát ír le), vagy pedig egyszer csak szélcsendes helyre kerül és örök nyugalomra lel (konstans pályát ír le, mely a zárt pályák egy speciális esetének tekinthető). Az is kérdés, hogy ezek mindegyike egyáltalán lehetséges forgatókönyv-e, illetve milyen szél kell ahhoz, hogy ilyen mozgásokat idézhessen elő.

A konstans pálya esete világos: egy porszem akkor marad örökké egy helyben, ha abban a pontban szélcsend van, azaz a szél sosem fújja onnantól tovább. Az ilyen szeleket nevezzük szélcsendesnek. Egy közismert matematikai tétel, az ún. sündisznótétel szerint a gömb felszínén fújó szelek (matematikai nyelven folytonos vektormezők) esetén mindig van legalább egy szélcsendes hely. Ennek a tételnek egyenes következménye például a többségünk hajában meglévő „forgó”, de az is, hogy egy légkörrel rendelkező bolygón valamely pontban mindig szélcsendnek kell lennie, mind a Földön, mind a Jupiteren (ilyen pont például a híres Nagy Vörös Folt közepe).

A másik két lehetőség, a nyílt és zárt pályák esete már bonyolultabb, és adott szél esetében első ránézésre nem feltétlenül világos, hogy annak pályái milyenek. Talán a gömb alakjából kiindulva azt várnánk, hogy minden pálya zárt, de ez határozottan nem igaz, és nem is nehéz rá ellenpéldát adni. Az viszont igaz, hogy

létezik zárt pálya, hiszen speciálisan a szélcsendes hely (mint konstans pálya) ilyen.

A Seifert-sejtés más dimenziójú probléma, de nem a szó hétköznapi, hanem matematikai értelmében. Továbbra is egy gömb felszínén fújó szél pályáival modellezhető kérdéstről van szó, csak hogy ez a gömb már nem a hagyományos, 3-dimenziós térbeli gömb 2-dimenziós felszíne, hanem egy 4-dimenziós térbeli gömb 3-dimenziós felszíne. A Herbert Seifert német matematikus által 1950-ben felvetett kérdés az, hogy a gömbön fújó szeleknek vannak-e zárt pályái? Ha szélcsendes a vektormező, akkor nyilván találunk egy triviális megoldást; az érdekes kérdés a szélcsenddel nem rendelkező, „mindenütt szeles” vektormezők esete. Mivel gömbökről van szó, az ember azt sejtene, hogy a válasz igenlő, azaz léteznie kell zárt pályáknak, hiszen ha minden elindul a gömbön, ezek közül legalább egy csak „körbeér”. Így voltak ezzel a matematikusok, többek között talán maga Seifert is. Kételyeket ébreszthetett ugyan, hogy folytonos vektormezők esetén viszonylag hamar megcáfolták az állítást, de a sokkal erősebb ún. simasági feltétel mellett még bíztak annak igaz voltában.

Teltek azonban az évek, évtizedek, és a megoldás csak nem jött. Egészen 1993-ig kellett rá várni, hogy egy lengyel-amerikai matematikus hölgy, Krystyna Kuperberg előálljon a válasszal: nem igaz a Seifert-sejtés! Ellenpéldaként konstruált egy sima érintővektormezőt a 3-dimenziós gömbön, amelynek se szélcsendje, se zárt pályagörbéje nincsen. Ez azt jelenti, hogy egy 4-dimenziós bolygó felszínén fújhat olyan szél, hogy soha semelyik porszem sem kerül vissza az eredeti helyére, hanem elátkozott Odüsszeusként örök bolyongásra van ítélve ezen a különleges, a képzelőerőnket próbára tevő vidéken.

Támogatás: A cikk az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-21-3 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

Irodalomjegyzék

- [1] Cipra, Barry. (*Vector*) *Field of Dreams*, What’s Happening in the Mathematical Sciences, Volume 3, American Mathematical Society (1996), pp. 47–51.
- [2] Kuperberg, Krystyna. *A smooth counterexample to the Seifert conjecture*, *Annals of Mathematics*, (2) 140 (3) (1994), pp. 723–732.