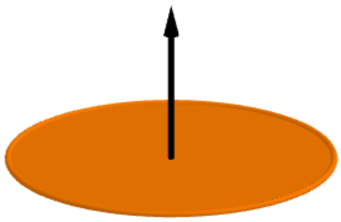
Hogyan dobjunk fejet 51% eséllyel?

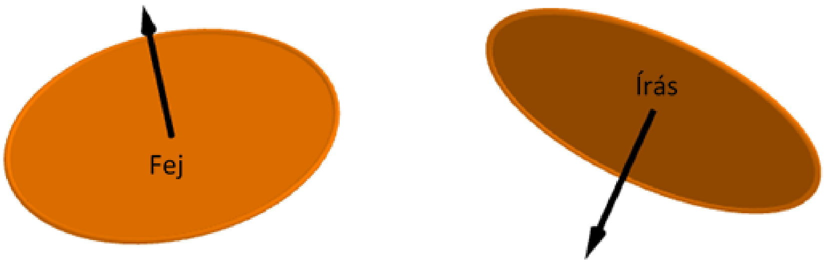
Remete László
matematikus, egyetemi tanársegéd, Debreceni Egyetem

Gyakran előfordulnak az életben olyan kisebb jelentőségű döntések, amelyeknek két kimenetele lehet, és a két lehetőség közül nem tudunk választani. Ilyenkor egy jó megoldás lehet a szerencsére bízni a döntést, mondjuk érmefeldobással. Például egy focimeccs elején a bíró így dönti el, hogy ki kezdjen. Felmerülhet a kérdés, hogy vajon igazságos megoldás-e ez?

Persi Diaconis, Susan Holmes és Richard Montgomery 2007-es cikke rávilágított arra, hogy bármennyire is szeretnénk, hogy a fej és az írás valószínűsége is 50% legyen, ezt nem fogjuk tudni kivitelezni. A tanulmány azzal az esettel foglalkozik, amikor az érmét felpöccintjük, majd még a levegőben, vízszintes tenyérrel elkapjuk, és ezt törekszünk a lehető legbecsületesebben elvégezni. Ilyen esetekben a dobás eredménye lényegében 3 tényezőtől függ, az érme helyzetétől a feldobás pillanatában, a perdületvektortól és az érme levegőben töltött idejétől. Ezek természetesen nagyon sok további külső hatástól függenek, amiket az átlagember nehezen tud precízen befolyásolni. Ha azonban a fenti adatokat előre ismerjük, akkor kis számolással könnyedén meghatározható a végeredmény.

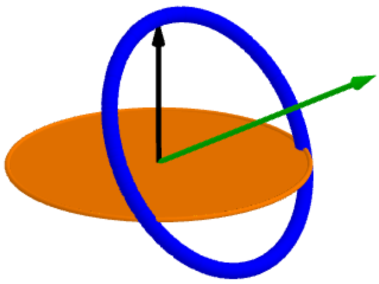


Képzeletben ragasszunk egy kis nyilat az érménk fej oldalára merőlegesen, a középpontjából kiindulva, az ábrán látható módon. Ezt az érme normálvektorának nevezzük. Világos, hogy ha a feldobás után valamikor megállítjuk az érmét, és a normálvektor „felfelé” mutat, akkor az érmének a fej oldala néz felfelé, ellenkező esetben pedig az írás.



Ezzel a megközelítéssel a dobás eredményének meghatározása leegyszerűsödik arra, hogy megmondjuk, hogy mikor hogyan áll az érme normálvektora.

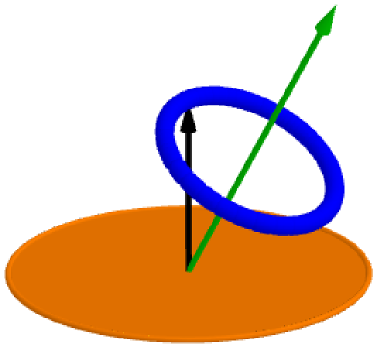
Az érme forgása során a normálvektor a perdületvektor körül fog forogni. A perdületvektor az érme forgásának egyszerű leírására szolgál pontosan úgy, ahogyan a normálvektor az érme állásának leírására. Ez szintén az érme középpontjából indul, így a normálvektor végpontja a forgás során egy körívet fog leírni. Az egész folyamatot modellezhetjük úgy, hogy a perdületvektor az érme középpontján áthaladó pálca, és az érmét a pálca, mint tengely körül forgatjuk a normálvektorával együtt.



Az ábrán a normálvektor feketével, a perdületvektor zölddel, a normálvektor végpontja által bejárt kör pedig kékkel van színezve. Azt, hogy a körvonalon éppen hol jár a normálvektor végpontja, a forgás gyorsasága és a levegőben töltött idő határozzák meg. Feltételeztük, hogy a kísérletet végző személy a dobást becsületesen szeretné elvégezni, ami egyrészt azt jelenti, hogy az érmét kellően erősen megpöccinti, vagyis az érme forgása a perdületvektor körül elég gyors, valamint az érmét hagyja egy darabig repülni is a levegőben. Ez alapján feltehetjük, hogy a normálvektor végpontjának elhelyezkedése a kék körön egyenletes eloszlást követ, azaz annak a valószínűsége, hogy a kör egy meghatározott ívén fog megállni egyenlő az ív hosszának és a kör kerületének hányadosával. Annak az esélye tehát, hogy fejet dobunk (amennyiben az érme vízszintes helyzetből indul a fej oldalával felfelé), egyenlő a kék körnek az érme síkja fölé eső ívhosszának és a kör kerületének hányadosával. Ha α a perdületvektor és a normálvektor által bezárt szög, akkor a keresett valószínűség:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\arcsin(\cot\alpha).$$

Láthatjuk, hogy ez a szám legalább $\frac{1}{2}$, azaz a fej dobásának valószínűsége mindig nagyobb lesz, mint az írásé. Emellett a fenti kifejezés csak akkor van értelmezve, ha $\alpha > 45°$. Ezt azzal magyarázhatjuk, hogy ha $\alpha \leq 45°$, akkor a teljes kék kör az érme síkja fölött helyezkedik el, azaz az érme csak libeg a levegőben, sose fordul át, végig a fej oldala lesz felfelé. Ezt a bűvészek szándékosan használják, ezzel elérhetik, hogy az esetek 100%-ában fejet dobjanak szabályos érmével. A trükköt pizza-dobásnak is szokták nevezni, az érme és a feldobott, megforgatott nyers pizzatészta mozgásának hasonlósága miatt. Érdekesség, hogy ha nem is törekszünk a pizza-dobásra, egy átlagember 100-ból 4-szer ilyet dob.



Sajnos ez a modell egy ponton még mindig torzít a valóságon, ugyanis azt nem várhatjuk el, hogy az érme feldobás pillanatában vízszintesen álljon. Az általános eset leírásához legyen továbbra is α a perdületvektor és a normálvektor szöge, emellett legyen β a perdületvektor és a vízszintes sík által bezárt szög. Eddig ez a két szög pont 90°-ra egészítette ki egymást, most ettől akár el is térhetünk. A fej dobás valószínűségét leíró képlet:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\arcsin(\cot\alpha\cdot\cot\beta).$$

A kérdés már csak az volt, hogy egy átlagos dobás esetén mekkora az α és a β értéke. Ehhez egy ~800 fps képkockasebességű kamerával rögzítettek nagyszámú becsületes érmefeldobást, majd ezeket a sorozatokat képfelismerő programok segítségével feldolgozták. Az így kapott eredmények azt mutatták, hogy a fej dobásának valószínűsége 51%, és nem 50%, és ez a cinkelés nem az érme alakjából, hanem csupán a mozgásából adódik.

Mire elég ez a plusz 1%? Képzeljük el azt a játékot, hogy valaki egy szabályos érmével becsületesen dob n-szer, és minden alkalommal a fejjel felfelé kezd. A játék előtt meg kell tippelnünk, hogy a fejek vagy az írások száma lesz nagyobb. A dobott fejek száma egy 0,51 paraméterű binomiális eloszlás lesz, és így már tudjuk, hogy a fejre érdemes fogadnunk. Vizsgáljuk meg, hogy sok dobás esetén mekkora a nyerési esélyünk:

n	1	11	101	1001	10001
Nyerési esély	0,51	0,53	0,58	0,74	0,98

Persze senki nem fog leülni velünk 10001 dobásig játszani, de a példa jól érzékelteti, hogy a sok kicsi milyen sokra megy.

Ez az összefoglaló egy egyszerűsített változata Persi Diaconis, Susan Holmes és Richard Montgomery [1] cikkének és az azt közérthetőbb módon összefoglaló [2] folyóiratcikknek. Az olvasók figyelmébe ajánlom még a Numberphile YouTube csatorna [3] videóját, amelyben Persi Diaconis beszél az érmefeldobással kapcsolatos kutatásukról.

Támogatás: A cikk az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-21-4-I kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

Irodalomjegyzék

[1] P. Diaconis, S.P.Holmes, R. Montgomery, *Dynamical Bias in the Coin Toss*, SIAM Review 49(2), (2007) 211-235. DOI: 10.1137/S0036144504446436

[2] D. Mackenzie, *The Fifty-one Percent Solution*, What's Happening in Mathematical Sciences 7, (2009) 34-45. ISBN: 978-0-8218-4478-6

[3] *How Random is a Coin toss?* – Numberphile. https://youtu.be/AY-nJv68T3MM